



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ - ΤΑΞΗ Γ

ΕΝΟΤΗΤΑ 1: Αξιοσημείωτες Ταυτότητες

1) Να βρείτε τα αναπτύγματα:

$$(\alpha) (x + 3)(x - 3) =$$

$$(\beta) (y + 2)^2 =$$

$$(\gamma) (y - 1)^2 =$$

$$(\delta) (2x - 3)^2 =$$

$$(\epsilon) (x - 3)^3 =$$

$$(\zeta) \left(x + \frac{1}{2}\right)^3 =$$

$$(\eta) (y^2 + 4)(y^2 - 4)(y^4 + 16) =$$

$$(\theta) \left(x - \frac{10}{x}\right)^2 =$$

2) Να κάνετε τις πράξεις:

$$(\alpha) (\alpha + 1)^2 + 2(\alpha - 7)(\alpha + 7) =$$

$$(\beta) (x - 1)^3 - (x + 1)^3 + 2x(3x - 1) =$$

3) Αφού κάνετε τις πράξεις, να βρείτε την αριθμητική τιμή του αποτελέσματος για $y = -1$ της παράστασης: $(3y + 1)^2 - 2(2y - 1)(2y + 1) - (5 - y)^2$

4) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $(2\alpha + 3)^2 - 3(\alpha - 2)(\alpha + 2) = \alpha^2 + 12\alpha + 21$

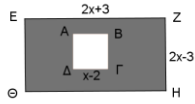
5) Αν $x - y = 7$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $(x + y)^2 - 4xy$

6) Αν $x + y = 3$ και $xy = 2$ να υπολογίσετε την παράσταση $x^2 + y^2$.

7) Αν $x - 3y = \alpha$ και $xy = \beta$ να δείξετε ότι $x^2 + 9y^2 = \alpha^2 + 6\beta$.

8) Να αποδείξετε την ισότητα $\left(\frac{x+y}{4}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{4}\right)^2 = \frac{x^2+y^2}{8}$.

- 9) Αν ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς $(x - 2)$ cm και ΕΖΗΘ ορθογώνιο με διαστάσεις $(2x + 3)$ cm και $(2x - 3)$ cm, να δείξετε ότι το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής είναι $E(x) = 3x^2 + 4x - 13$.



ΕΝΟΤΗΤΑ 2: Παραγοντοποίηση - Ρητές αλγεβρικές παραστάσεις

- 1) Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο παραγόντων τα πολυώνυμα:

(α) $2\alpha + 2\beta =$

(β) $\omega^2 - 9 =$

(γ) $3x + 3y + \alpha x + \alpha y =$

(δ) $4x^2 + 4x + 1 =$

(ε) $x\omega + 3y + 3x + y\omega =$

(στ) $x^3 - 8 =$

(ζ) $\alpha x^3 + \alpha y^3 =$

(η) $x - 1 + \alpha x - \alpha =$

(θ) $x^2 - x - 6 =$

(ι) $49x^2 + 14x + 1 =$

(ια) $41^2 - 40^2 =$

(ιβ) $y^2 + 3y - 2y - 6 =$

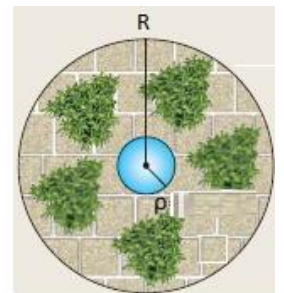
(ιγ) $x^3 - 16x =$

(ιδ) $x^2 - y^2 + 2y - 1 =$

(ιε) $\alpha x + \alpha - x^2 - 4x - 3 =$

(ιστ) $(x - y)^3 - x + y =$

- 2) Σε μια κυκλική πλατεία ακτίνας R κατασκευάστηκε ένα κυκλικό σιντριβάνι ακτίνας ρ , και ο υπόλοιπος χώρος καλύφτηκε με πλακόστρωτο όπως φαίνεται και στο σχήμα. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του πλακόστρωτου ισούται με $E = \pi (R - \rho)(R + \rho)$.



- 3) Να βρείτε τις τιμές για τις οποίες ορίζεται το κλάσμα και να το απλοποιήσετε:

(α) $\frac{5(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta} =$

(β) $\frac{5\alpha+15}{\alpha^2+3\alpha} =$

(γ) $\frac{x^2-10x+25}{2x^2-10x} =$

4) Να κάνετε τις πράξεις:

$$(\alpha) \frac{3}{2x} + \frac{5}{2x} - \frac{1}{2x} =$$

$$(\beta) \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha} =$$

$$(\gamma) \frac{1}{y+1} - \frac{1}{y-1} =$$

$$(\delta) \frac{1}{x-1} - \frac{2x}{x^2-1} =$$

$$(\epsilon) \frac{\alpha^2-1}{\alpha} \cdot \frac{3\alpha+3}{4\alpha^2} =$$

$$(\sigma\tau) \frac{10\alpha\beta}{\omega} \cdot \frac{\alpha\omega^2}{\alpha^4} \cdot \frac{\alpha^2}{5\omega} =$$

$$(\zeta) \frac{x^2}{y^2} \div \left(\frac{x^3}{y}\right)^2 =$$

$$(\eta) \frac{x^2-4x+4}{x^2-9} \div \frac{x^2-4}{x^2-3x} =$$

$$(\theta) \frac{\frac{3}{\alpha} - \frac{3}{\beta}}{\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2}} =$$

$$(\iota) \left(\frac{3}{x^2-9} - \frac{2}{x^2-6x+9}\right) \div \frac{2x-30}{3x^2-27} =$$

5) Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

$$(\alpha) (x-4)(x-3) = 0$$

$$(\beta) y^2 - 25 = 0$$

$$(\gamma) x^2 + 4x = 0$$

$$(\delta) x^2 = 6x - 5$$

$$(\epsilon) \frac{2}{x-1} - \frac{3}{x+1} = \frac{2x}{x-1}$$

$$(\sigma\tau) \frac{x}{x+2} + \frac{x+1}{x^2-4} = \frac{x}{x-2}$$

$$(\zeta) \alpha(\alpha-1) = 20$$

$$(\eta) (x-5)^2 = 16$$

$$(\theta) 2x^2 - x - 3 = 0$$

$$(\iota) 4y^2 + 20y = 0$$

$$(\iota\alpha) x^2 + 8x - 9 = 0$$

$$(\iota\beta) 2x^2 - x - 6 = 0$$

6) Να λύσετε τα πιο κάτω προβλήματα με τη βοήθεια εξίσωσης:

(α) Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει διαστάσεις που διαφέρουν κατά 3 cm μεταξύ τους. Να βρείτε τις διαστάσεις του παραλληλογράμμου αν το εμβαδόν του είναι 10 cm^2 .

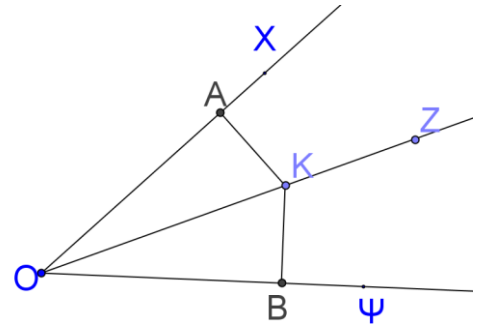
(β) Το άθροισμα των τετραγώνων δύο διαδοχικών άρτιων αριθμών είναι 20. Ποιοι είναι οι αριθμοί;

7) Να δείξετε ότι το πιο κάτω σύνθετο κλάσμα είναι ένας σταθερός αριθμός:

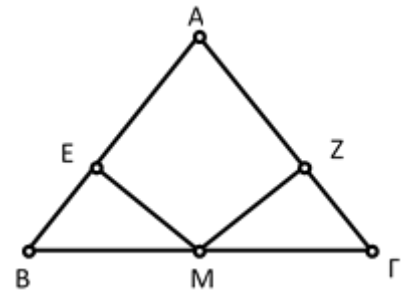
$$\frac{\frac{\alpha^2 + 4\alpha - 21}{4\alpha^2 - 36}}{\frac{\alpha^2 + 8\alpha + 7}{4\alpha^2 + 16\alpha + 12}} =$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 3: Γεωμετρία

- 1) Στο διπλανό σχήμα η ΟΖ είναι διχοτόμος της γωνίας ΧΟΨ. Αν ΚΑ και ΚΒ οι αποστάσεις από τις πλευρές ΟΧ και ΟΨ αντίστοιχα να δείξετε ότι ΚΑ και ΚΒ είναι ίσες.



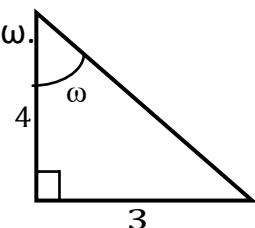
- 2) Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB=AG$. Το Μ είναι μέσο του της ΒΓ και ΜΕ, ΜΖ είναι οι αποστάσεις του Μ από τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι $BE=ΓΖ$.



- 3) Δίνεται τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ ύψος του. Προεκτείνουμε την ΑΒ προς το μέρος του Β κατά τμήμα $BE=AB$. Από το Ε φέρνουμε κάθετη στην προέκταση της ΒΓ, την ΕΖ. Να δείξετε ότι $BZ=BD$.
- 4) Δίνεται τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ. Στις πλευρές ΑΒ και ΒΓ παίρνουμε δύο σημεία Δ και Ε αντίστοιχα ώστε $BD=BE$. Αν Ζ τυχόν σημείο της διχοτόμου ΒΗ να δείξετε ότι $ZD = ZE$.
- 5) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB=AG$). Δ είναι το μέσο της ΑΒ και Ε το μέσο της ΑΓ. Από τα Δ και Ε φέρουμε κάθετες ΔΖ και ΕΗ πάνω στη ΒΓ. Να δείξετε ότι:
- α) $ΔΖ = ΕΗ$
β) Το τρίγωνο ΑΖΗ είναι ισοσκελές.
- 6) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB=AG$). Προεκτείνουμε την βάση ΒΓ προς το Β και προς το Γ κατά τμήματα $BD=ΓΕ$. Να δείξετε ότι τα σημεία Δ και Ε απέχουν ίσες αποστάσεις από τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

ΕΝΟΤΗΤΑ 4: Τριγωνομετρία

- 1) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .



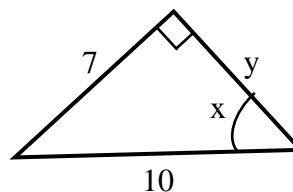
- 2) Να συμπληρώσετε τα πιο κάτω:

(α) $\eta\mu 75^\circ = \sigma\upsilon\nu \dots\dots\dots$

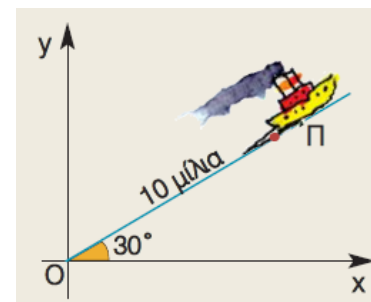
(β) $\sigma\upsilon\nu 25^\circ = \dots\dots\dots 65^\circ$

- 3) Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$), $\varepsilon\varphi B = \frac{3}{4}$. Να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας Β.

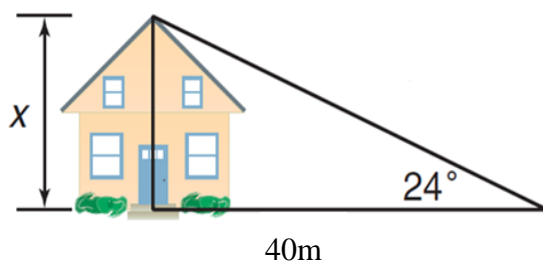
- 4) Στο διπλανό τρίγωνο να υπολογίσετε τα x και y :



- 5) Ένα πλοίο Π αναχώρησε από το λιμάνι Ο και κινήθηκε βορειοανατολικά προς μια κατεύθυνση που σχημάτιζε με τον άξονα των ΟΧ γωνία 30° . Να βρείτε τις συντεταγμένες του πλοίου μετά από διαδρομή 10 μιλίων.



- 6) Να υπολογίσετε το ύψος του σπιτιού.



ΕΝΟΤΗΤΑ 5: Ευθεία- Γραμμικά Συστήματα

- 1) Να βρείτε την κλίση των πιο κάτω ευθειών:

(α) $y = 4x + 5$

(β) $y = -\frac{1}{4}x + 3$

(γ) $2x + 3y = 4$

(δ) $x = 6$

(ε) $y = -2$

(στ) $4x - 2y - 5 = 0$

- 2) Δίνονται τα σημεία Α(1, -2) και Β(4, 2).

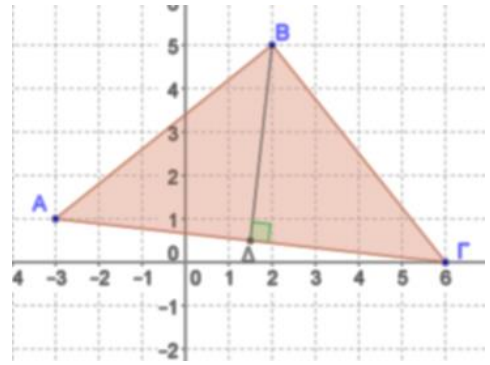
(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Μ του ΑΒ.

(β) Να βρείτε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB.

3) Στο διπλανό σχήμα, δίνεται το τρίγωνο ABΓ και ΒΔ ύψος του τριγώνου.

(α) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις πλευρές του.

(β) Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδό του τριγώνου .



4) Δίνονται τα σημεία A(3,6) B(7,2) Γ(3,-2).

(α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο ισοσκελές.

(β) Να βρείτε το μήκος της διαμέσου AM.

5) Να εξετάσετε αν οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι παράλληλες, ταυτίζονται ή τέμνονται:

(α) $\epsilon_1: y = 2x + 1$

(β) $\epsilon_1: y = 2x + 5$

(γ) $\epsilon_1: 3x - y = 1$

$\epsilon_2: y = -x + 2$

$\epsilon_2: 2y = 12 + 4x$

$\epsilon_2: 2y - 6x = -2$

6) Να βρείτε την τιμή του κ ώστε η ευθεία $\epsilon_1: y = (2 - \kappa)x + 9$ να είναι παράλληλη με την ευθεία $\epsilon_2: 10x - 2y = 3$.

7) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ϵ) που περνά από το σημείο K(3, -2) και είναι παράλληλη με την ευθεία $\epsilon_1: -2x - y = 9$.

8) Δίνεται τρίγωνο ABΓ με κορυφές A(-3, 4), B(-1,0) και Γ(3, 2).

α) Να υπολογίσετε τις κλίσεις των πλευρών του τριγώνου.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

γ) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους ΒΔ.

9) Να εξετάσετε κατά πόσο το ζεύγος αριθμών $\chi = 3$ και $\psi = 2$ είναι λύση του συστήματος :

$$\chi - \psi = 1$$

$$\chi + 2\psi = 7$$

10) Να λύσετε τα πιο κάτω συστήματα εξισώσεων:

α) $\chi + \psi = 8$

$\chi - \psi = 2$

β) $5\chi - 3\psi = 1$

$3\chi + \psi = 9$

γ) $2\chi + \psi = 1$

$3\chi + 5\psi = -9$

11) Αν το σύστημα $\lambda\chi + \kappa\psi = 1$ έχει λύση το $\chi = 2$ και $\psi = 3$ να βρείτε τα κ και λ .

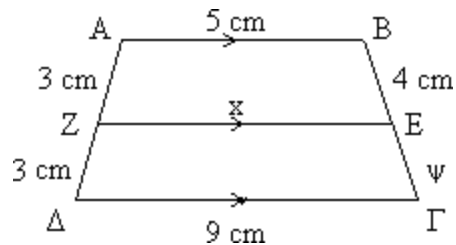
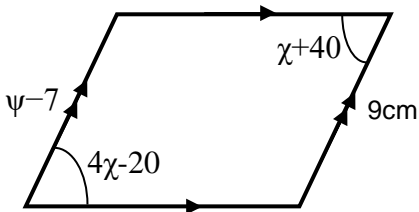
$$2\lambda\chi - \kappa\psi = 11$$

12) Σε μια εκδρομή πήραν μέρος 30 άτομα άντρες, γυναίκες και παιδιά. Τα έξοδα ήταν 350 ευρώ και τα πλήρωσαν μόνο οι μεγάλοι. Κάθε άντρας πλήρωσε 15 ευρώ και κάθε γυναίκα 10 ευρώ. Αν τα παιδιά είναι όσες και οι γυναίκες να βρείτε πόσα ήταν τα παιδιά.

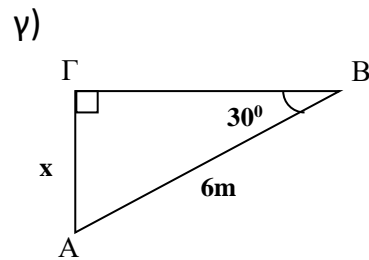
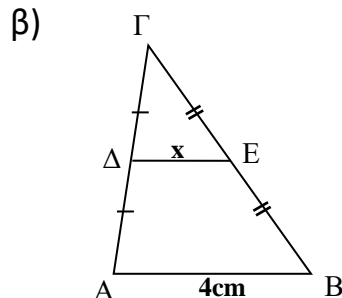
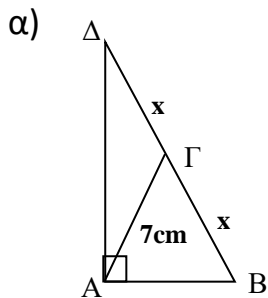
13) Σε μια έκθεση επίπλων υπάρχουν διαθέσιμοι και τριθέσιοι καναπέδες. Αν οι καναπέδες είναι 30 και οι θέσεις 70, να βρείτε πόσοι είναι οι διαθέσιμοι και πόσοι οι τριθέσιοι.

ΕΝΟΤΗΤΑ 9 – Παραλληλόγραμμα και Τραπεζία

1) Στα πιο κάτω σχήματα να υπολογίσετε τα χ και ψ .

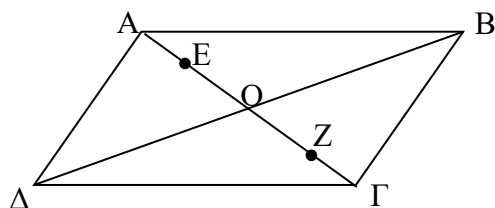


2) Να υπολογίσετε το χ στις πιο κάτω περιπτώσεις. (Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας).



3) Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε τη ΔΓ προς το Γ κατά τμήμα ΓΕ=ΓΔ. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΕΓ είναι παραλληλόγραμμο.

4) Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος είναι παραλληλόγραμμο με Ο σημείο τομής των διαγωνίων του. Αν $OE = OZ$, αποδείξτε ότι το ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο



το

- 5) Δίνεται τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ. Προεκτείνουμε την διάμεσο ΑΔ προς το μέρος του Δ κατά τμήμα ΔΕ=ΑΔ. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΕΓ είναι παραλληλόγραμμο.
- 6) Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Από τη κορυφή Α φέρουμε την ΑΚ κάθετη στη ΓΔ και από το Γ τη ΓΜ κάθετη στην ΑΒ. Να δείξετε ότι το ΑΚΓΜ είναι ορθογώνιο.
- 7) Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι κορυφές ρόμβου.
- 8) Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Αν Ε και Ζ είναι δύο σημεία πάνω στη διαγώνιο ΒΔ έτσι ώστε ΒΕ=ΔΖ, να δείξετε ότι το ΑΕΓΖ είναι ρόμβος.
- 9) Έστω τρίγωνο ΚΛΜ και Ε,Ζ τα μέσα των πλευρών ΚΛ και ΚΜ αντίστοιχα. Προεκτείνουμε την ΕΖ και παίρνουμε ΖΗ=ΕΖ. Να δείξετε ότι ΕΗΜΛ είναι παραλληλόγραμμο.
- 10) Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών τετραγώνου είναι κορυφές ενός άλλου τετραγώνου.
- 11) Να δείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ισοσκελούς τραπεζίου είναι κορυφές ρόμβου.

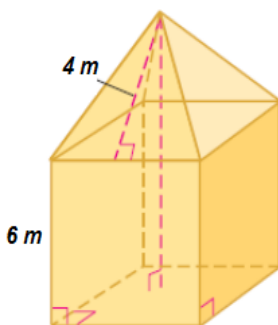
ΕΝΟΤΗΤΑ 7 – Στερεομετρία

- 1) Ένα ορθό πρίσμα έχει βάση ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 3 cm και 4 cm. Το ύψος του πρίσματος είναι 10 cm. Να υπολογίσετε:
 - α) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και
 - β) Τον όγκο του πρίσματος.
- 2) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο κύβου με ακμή $\alpha = 3\text{cm}$.
- 3) Κύβος έχει ολική επιφάνεια ίση με 96 cm^2 . Να υπολογίσετε τον όγκο του.
- 4) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις 6 cm, 4cm και 5 cm.
- 5) Αν η διαγώνιος κύβου είναι $\delta = 4\sqrt{3}\text{ cm}$ να υπολογίσετε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας και τον όγκο του.
- 6) Ο όγκος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι 240 cm^3 . Οι διαστάσεις της βάσης είναι 4cm και 6cm. Να υπολογίσετε το ύψος και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του παραλληλεπιπέδου.
- 7) Πισίνα σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου έχει βάση με διαστάσεις 25 m και 10 m. Το ύψος της είναι 3 m. Θα επενδύσουμε τα τοιχώματα και τον πυθμένα της με

μονωτικό υλικό που στοιχίζει €15 το τετραγωνικό μέτρο. Πόσα θα στοιχίσει η μόνωση της πισίνας;

- 8) Μια κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει πλευρά βάσης 6 cm και ύψος 4 cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο της πυραμίδας.
- 9) Μια κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει εμβαδόν βάσης 144 cm^2 και παράπλευρο ύψος 10 cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο της πυραμίδας.
- 10) Κύλινδρος έχει ακτίνα βάσης 4 cm και ύψος 6 cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του κυλίνδρου.
- 11) Κύλινδρος έχει εμβαδόν βάσης $36\pi \text{ m}^2$ και ύψος 8 m. Να υπολογίσετε:
α) το εμβαδόν της κυρτής του επιφάνειας,
β) το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας και γ) τον όγκο του.
- 12) Κύλινδρος έχει όγκο ίσο με $54\pi \text{ cm}^3$ και ύψος διπλάσιο από την ακτίνα της βάσης του. Να υπολογίσετε: α) Το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας και β) Τον όγκο του.
- 13) Κώνος έχει γενέτειρα ίση με 15cm και ύψος 12cm. Να βρεθεί α) η ακτίνα του, β) το εμβαδόν της κυρτής του επιφάνειας, γ) το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας και δ) ο όγκος του. (Οι απαντήσεις να δοθούν συναρτήσει του π)
- 14) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας ενός κώνου είναι $144\pi \text{ cm}^2$ και το εμβαδόν της βάσης του $64\pi \text{ cm}^2$. Να βρείτε: α) Το ύψος του κώνου και β) Τον όγκο του κώνου.
- 15) Η γενέτειρα ενός κώνου σχηματίζει με το ύψος του γωνία 30° και η ακτίνα της βάσης του είναι 3 cm. Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του κώνου.

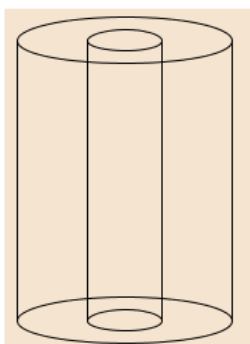
16)



Η διπλανή ξύλινη κατασκευή αποτελείται από έναν κύβο και μια τετραγωνική πυραμίδα.

Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν της εξωτερικής επιφάνειας της κατασκευής.

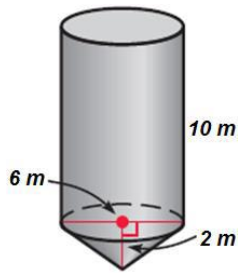
17)



Στο διπλανό σχήμα, η ξύλινη κατασκευή αποτελείται από δύο κυλίνδρους. Ο εσωτερικός κύλινδρος είναι κενός. Οι βάσεις τους είναι ομόκεντροι κύκλοι και οι ακτίνες τους είναι 2 cm και 6 cm αντίστοιχα.

Αν το ύψος των δύο κυλίνδρων είναι 10 cm, να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας και τον όγκο της κατασκευής.

18)



Στην διπλανή εικόνα παρουσιάζεται μια μεταλλική κατασκευή που αποτελείται από έναν κύλινδρο και έναν κώνο με διάμετρο 6 cm και ύψη 10 cm και 2 cm αντίστοιχα. Να βρείτε τον όγκο της μεταλλικής κατασκευής.

ΚΑΛΟ ΔΙΑΒΑΣΜΑ